

তৃতীয় অধ্যায় পাঠ-৯: ডি-মরগ্যানের উপপাদ্য ও সত্যক সারণি।

এই পাঠ শেষে যা যা শিখতে পারবে-

- ১। ডি-মরগ্যান উপপাদ্যসমূহ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ২। সত্যক সারণি তৈরি করতে পারবে।
- ৩। সত্যক সারণির থেকে বুলিয়ান সমীকরণ তৈরি করতে পারবে।
- ৪। সত্যক সারণির সাহায্যে যেকোন বুলিয়ান সমীকরণ প্রমাণ করতে পারবে।
- ৫। সত্যক সারণির সাহায্যে ডি-মরগ্যানের উপপাদ্য প্রমাণ করতে পারবে

ডি-মরগ্যানের উপপাদ্য:

ফরাসি গণিতবিদ ডি-মরগ্যান, বুলিয়ান ফাংশন সরলীকরণ করার জন্য দুটি সূত্র আবিষ্কার করেন।

প্রথম উপপাদ্য: যেকোন সংখ্যক চলকের যৌক্তিক যোগের পূরক বা কমপ্লিমেন্ট, প্রত্যেক চলকের পূরক বা কমপ্লিমেন্টের যৌক্তিক গুণের সমান। n সংখ্যক চলকের জন্য প্রথম উপপাদ্য-

$$\overline{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \dots \cdot \overline{A_n}$$

দ্বিতীয় উপপাদ্য: যেকোন সংখ্যক চলকের যৌক্তিক গুণের পূরক বা কমপ্লিমেন্ট, প্রত্যেক চলকের পূরক বা কমপ্লিমেন্টের যৌক্তিক যোগের সমান। n সংখ্যক চলকের জন্য দ্বিতীয় উপপাদ্য –

$$\overline{A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3} + \dots + \overline{A_n}$$

A ও B দুটি চলকের জন্য ডি-মরগ্যানের উপপাদ্য দুটি নিম্নরূপ-

প্রথম উপপাদ্য: $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

দ্বিতীয় উপপাদ্য: $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

A, B ও C তিনটি চলকের জন্য ডি-মরগ্যানের উপপাদ্য দুটি নিম্নরূপ-

প্রথম উপপাদ্য: $\overline{A + B + C} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$

দ্বিতীয় উপপাদ্য: $\overline{A \cdot B \cdot C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

সত্যক সারণি:

যে সারণির মাধ্যমে বুলিয়ান সমীকরণে চলকসমূহের বিভিন্ন মানবিন্যাসের জন্য বিভিন্ন আউটপুট প্রদর্শন করা হয়, তাকে সত্যক সারণি বলে। সত্যক সারণির সাহায্যে বুলিয়ান সমীকরণের সত্যতা যাচাই করা হয়।

যদি বুলিয়ান সমীকরণে n সংখ্যক চলক থাকে, তবে সত্যক সারণিতে ইনপুট কম্বিনেশন হবে 2^n সংখ্যক এবং আউটপুটও হবে 2^n সংখ্যক।

উদাহরণঃ একটি অর(OR) লজিক গেইটের ইনপুট চলক A ও B এর সাপেক্ষে আউটপুট ফাংশন $F=A+B$ এর সত্যক সারণি দেখানো হল। যেহেতু চলক দুইটি (A ও B) তাই ইনপুট সেট $2 \times 2 = 4$ টি হবে।

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

চিত্রঃ $F=A+B$ এর সত্যক সারণি

সত্যক সারণি থেকে আউটপুটের বুলিয়ান এক্সপ্রেসন বা সমীকরণ লেখার উপায়ঃ

সত্যক সারণির বুলিয়ান ফাংশন দুই ভাবে নির্ণয় করা যায়। যথা-

- মিনটার্মের সাহায্যে
- ম্যাক্সটার্মের সাহায্যে

মিনটার্মের সাহায্যে সারণির বুলিয়ান ফাংশন নির্ণয়ঃ

সত্যক সারণিতে ব্যবহৃত ইনপুট বিন্যাসসমূহের গুণফলকে বলা হয় মিনটার্ম। প্রতিটি মিনটার্মের মান 1 হয়। সত্যক সারণির যেসব মিনটার্মের আউটপুট মান 1, সেই মিনটার্মসমূহ যোগ করে বুলিয়ান ফাংশন নির্ণয় করা হয়। এ পদ্ধতিকে SOP(Sum of Products) বলা হয়।

$\bar{A}B$ & $A\bar{B}$ মিনটার্ম

সমূহের আউটপুট 1

So $F = \bar{A}B + A\bar{B}$

Input		Output
A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$\bar{A}B$
 $A\bar{B}$

ম্যাক্সটার্মের সাহায্যে সারণির আউটপুট ফাংশন নির্ণয়:

সত্যক সারণিতে ব্যবহৃত ইনপুট বিন্যাসসমূহের যোগফলকে বলা হয় ম্যাক্সটার্ম। প্রতিটি ম্যাক্সটার্মের মান ০ হয়। সত্যক সারণির যেসব ম্যাক্সটার্মের আউটপুট মান ০, সেই ম্যাক্সটার্মসমূহ গুণ করে আউটপুট ফাংশন বা সমীকরণ নির্ণয় করা হয়। এ পদ্ধতিকে POS (Product of Sums) বলা হয়।

$(A + B) \& (\bar{A} + \bar{B})$ ম্যাক্সটার্ম
সমূহের আউটপুট ০

$$\begin{aligned} F &= (A + B) \cdot (\bar{A} + \bar{B}) \\ &= A\bar{A} + A\bar{B} + \bar{A}B + B\bar{B} \\ &= 0 + A\bar{B} + \bar{A}B + 0 \\ &= A\bar{B} + \bar{A}B \end{aligned}$$

Input		Output
A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(A + B)

($\bar{A} + \bar{B}$)

অর্থাৎ উভয় প্রক্রিয়ায় একই বুলিয়ান ফাংশন পাওয়ার যায়।

সত্যক সারণির সাহায্যে বুলিয়ান সমীকরণ বা উপপাদ্যের প্রমাণ:

সত্যক সারণির সাহায্যে বুলিয়ান সমীকরণ প্রমাণের জন্য নিম্নোক্ত ধাপসমূহ অনুসরণ করা হয়-

- ১। বুলিয়ান সমীকরণটিতে ব্যবহৃত মোট চলক সংখ্যা নির্ণয় করতে হয়। n সংখ্যক চলকের জন্য সত্যক সারণিতে 2^n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন ইনপুট সেট হয়।
- ২। সত্যক সারণির মূল কাঠামো তৈরির জন্য সমীকরণে যতোগুলো চলক আছে ততোগুলো কলাম এবং 2^n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন ইনপুট সেট দেওয়ার জন্য 2^n সংখ্যক সারি বা রো তৈরি করতে হয়।
- ৩। সমীকরণের বামপক্ষ ও ডানপক্ষ সমান প্রমাণের জন্য বামপক্ষ ও ডানপক্ষের সকল প্রোডাক্ট টার্ম নির্ণয় করতে হয়। প্রোডাক্ট টার্ম নির্ণয় করার জন্য প্রয়োজনীয় সাব-প্রোডাক্ট টার্ম নির্ণয় করতে হয়। এক্ষেত্রে বিভিন্ন সাব-প্রোডাক্ট টার্ম বা প্রোডাক্ট টার্ম নির্ণয়ের জন্য অতিরিক্ত কলাম তৈরি করতে হয়।

A ও B দুইটি চলকের জন্য ডি-মরগ্যানের উপপাদ্যদুটি সত্যক সারণির সাহায্যে প্রমাণ:

$$\text{প্রথম উপপাদ্য: } \overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$\text{দ্বিতীয় উপপাদ্য: } \overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$

A	B	\bar{A}	\bar{B}	A+B	$\overline{A+B}$	$\bar{A}.\bar{B}$	A.B	$\overline{A.B}$	$\overline{A+B}$
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0

A, B ও C তিনটি চলকের জন্য ডি-মরগ্যানের উপপাদ্যের প্রমাণ

প্রথম উপপাদ্য: $\overline{A+B+C} = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}$

দ্বিতীয় উপপাদ্য: $\overline{A.B.C} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$

A	B	C	\bar{A}	\bar{B}	\bar{C}	A+B+C	$\overline{A+B+C}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	ABC	\overline{ABC}	$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$
0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0

পাঠ মূল্যায়ন-

জ্ঞানমূলক প্রশ্নসমূহ:

- ক। সত্যক সারণি কী?
- ক। ডি-মরগ্যানের উপপাদ্য লেখ

অনুধাবনমূলক প্রশ্নসমূহ:

- খ। ডি-মরগ্যানের উপপাদ্যের প্রমাণ দাও।
- খ। N সংখ্যক চলকের ক্ষেত্রে ডি-মরগ্যানের উপপাদ্য ব্যাখ্যা কর।

- খ। সত্যক সারণি কেন ব্যবহার করা হয় লেখ।
- খ। মিনটার্ম ও ম্যাক্সটার্ম এর মধ্যে পার্থক্য লিখ।

সৃজনশীল প্রশ্নসমূহ:

উদ্দীপকের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

1. $(A+B)(\bar{A}+P)(\bar{B}+P)=P(A+B)$
2. $(A+\bar{A}B)(A+B)=A+B$

গ) উদ্দীপকের ২ নং সমীকরণটি সত্যক সারণির সাহায্যে প্রমাণ কর।

ঘ) উদ্দীপকের ১ নং সমীকরণটি প্রমাণ করার জন্য কতোগুলো ইনপুট কম্বিনেশন প্রয়োজন?
সত্যক সারণির সাহায্যে বিশ্লেষণ কর।

উদ্দীপকের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

1. $A + \bar{B} + \bar{C}\bar{D} = \bar{A}B(\bar{C} + D)$
2. $(X+Y)(\bar{X} + Z)(Y+Z)=XZ+\bar{X}y+YZ$

গ) উদ্দীপকের ২ নং সমীকরণটি সত্যক সারণির সাহায্যে প্রমাণ কর।

ঘ) উদ্দীপকের ১ নং সমীকরণটি প্রমাণ করার জন্য কতোগুলো ইনপুট কম্বিনেশন প্রয়োজন?
সত্যক সারণির সাহায্যে বিশ্লেষণ কর।

বহুনির্বাচনি প্রশ্নসমূহ:

১। সত্যক সারণির কাজ কোনটি?

- ক) মান-নির্নয় খ) সত্যতা যাচাই গ) ইনপুট নির্নয় ঘ) আউটপুট নির্নয়