1. **ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্সঃ** $|A| = 0$ হলে ম্যাট্রিক্সকে বলা হয় ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স অর্থাৎ যে ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান শূন্য তাকে ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স বলা হয়।
2. **অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্সঃ** $|A| \neq 0$ হলে ম্যাট্রিক্সকে বলা হয় অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স অর্থাৎ যে ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান শূন্য হয় না তাকে অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স বলা হয়।
3. **আনুপাতিক/অনুরাশিঃ** কোন নির্ণায়কের সারি এবং কলাম বাদ দিলে যে রেজাল্ট পাওয়া যায় সেইটা কোন নির্ণায়কের অনুরাশি।

   উদাহরণঃ $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

   $\therefore a_1$ এর অনুরাশি হল $= \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$
4. **সহগুণকঃ** অনুরাশির সাথে $(-1)^{i+j}$ গুন করলে যে রেজাল্ট পাওয়া যায় সেইটা কোন নির্ণায়কের সহগুনক।

   উদাহরণঃ $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

   $\therefore a_1$ এর সহগুনক হল $= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$
5. **রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্স (Transpose matrix):** কোন ম্যাট্রিক্সের সারিগুলোকে কলামে এবং কলামগুলোকে সারিতে পরিবর্তন করলে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সের রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্স বলা হয়।
6. **Adjoint ম্যাট্রিক্স:** কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের সহগুনকগুলি দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্সকে সারিগুলোকে কলামে এবং কলামগুলোকে সারিতে পরিবর্তন করলে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স এর **Adjoint** ম্যাট্রিক্স বলা হয় এবং এটিকে **AdjA** দ্বারা সূচিত করা হয়।
7. **বিপরীত ম্যাট্রিক্স:** দুইটি বর্গ ম্যাট্রিক্সের গুণফল যদি একক ম্যাট্রিক্সের সমান হয় তবে এদের একটিকে অপরটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স বলা হয় অর্থাৎ যদি কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর জন্য একটি একই ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স B থাকে যেন $AB = BA = I$ হয়, তবে B ম্যাট্রিক্সকে A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স বলে। A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্সকে A^{-1} দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$
8. **বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করার সুত্রঃ** $A^{-1} = \dfrac{AdjA}{|A|} [\because |A| \neq 0]$

*****33.** A_1, B_1, C_1 **যথাক্রমে** a_1, b_1, c_1 **এর সহগুনক হলে,** $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ **থেকে প্রমাণ কর যে,**

$a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 = 0$

সমাধানঃ এখানে,

a_1 এর সহগুনক $A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$= b_2c_3 - b_3c_2$

b_1 এর সহগুনক $B_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$= -(a_2 c_3 - a_3 c_2)$

c_1 এর সহগুনক $C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

$= a_2 b_3 - a_3 b_2$

$\therefore L.H.S = a_3 A_1 + b_3 B_1 + c_3 C_1$

$= a_3(b_2 c_3 - b_3 c_2) - b_3(a_2 c_3 - a_3 c_2) + c_3(a_2 b_3 - a_3 b_2)$

$= a_3 b_2 c_3 - a_3 b_3 c_2 - a_2 b_3 c_3 + a_3 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_3 - a_3 b_2 c_3 = 0$

Shortcut Technic-01: যদি $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ **হয়, তবে (** $A^{-1} = \dfrac{AdjA}{|A|}$ **) নির্ণয়:** $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

****29(i). যদি** $A = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ **হয়, তবে দেখাও যে,** $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{13} & \dfrac{-5}{13} \\ \dfrac{-2}{13} & \dfrac{1}{13} \end{bmatrix}$

(ii). যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$ **হয়, তবে দেখাও যে,** $AA^{-1} = I_2$

(i). সমাধানঃ দেওয়া আছে , $A = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore |A| = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$

$= -3 - 10$

$= -13$

$\therefore |A| \neq 0$

যেহেতু, A একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স। সুতরাং, A ম্যাট্রিক্সের A^{-1} বিদ্যমান।

ধরি, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

এখন, $|A|$ **এর সহগুনক গুলো হলো,** $a_{11} = (-1)^{1+1}.3 = (-1)^2.3 = 1.3 = 3$

$a_{12} = (-1)^{1+2}.(-2) = (-1)^3.(-2) = (-1).(-2) = 2$

$a_{21} = (-1)^{2+1}.(-5) = (-1)^3.(-5) = (-1).(-5) = 5$

$a_{22} = (-1)^{2+2}.(-1) = (-1)^4.(-1) = 1.(-1) = -1$

$\therefore |A|$ **এর সহগুনক ম্যাট্রিক্স,** $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

$\therefore AdjA = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}^T$

$$=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

আমরা জানি, $A^{-1}=\frac{adjA}{|A|}$

$$=\frac{\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}{-13}$$

$$=-\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -\frac{3}{13} & \frac{-5}{13} \\ \frac{-2}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$$

(ii). সমাধানঃ দেওয়া আছে , $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$

$$\therefore |A|=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}=20-15=5$$

$$\therefore |A|\neq 0$$

যেহেতু, A একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স। সুতরাং, A ম্যাট্রিক্সের A^{-1} বিদ্যমান।

ধরি, $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

এখন, $|A|$ **এর সহগুনক গুলো হলো,**

$a_{11}=10$

$a_{12}=-3$

$a_{21}=-5$

$a_{22}=2$

$\therefore$ $|A|$ **এর সহগুনক ম্যাট্রিক্স,** $A=\begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore AdjA=\begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

আমরা জানি, $A^{-1}=\frac{AdjA}{|A|}$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}}{5}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{10}{5} & \frac{-5}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{-3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\therefore L.H.S = AA^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{-3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.2 + 5.(\frac{-3}{5}) & 2.(-1) + 5.\frac{2}{5} \\ 3.2 + 10.(\frac{-3}{5}) & 3.(-1) + 10.\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 - 3 & -2 + 2 \\ 6 + 2.(-3) & -3 + 2.2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 - 6 & -3 + 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I_2$$

$$= R.H.S$$