

এইচএসসি-২০২১

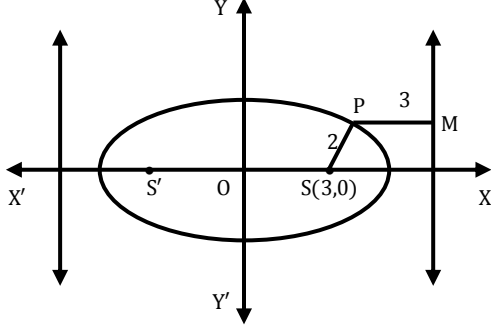
বিষয়: উচ্চতর গণিত ২য় পত্র

অ্যাসাইনমেন্ট ক্রমিক নং- 02

অ্যাসাইনমেন্ট শিরোনাম: কনিক

(i) $\alpha x^2 + \beta y^2 + 72x - 32y - 16 = 0$

(ii) নিচের চিত্রটি লক্ষ কর:



ক) $y^2 = 4px - 12$ প্যারাবোলাটি S বিন্দুগামী হলে এর উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং অক্ষরেখা ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

খ) চিত্রে প্রদর্শিত উপবৃত্তটির নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ) SS' বৃহৎ অক্ষ এবং 8 উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট হাইপারবোলার সমীকরণ নির্ণয় কর।

ঘ) $\alpha = 18, \beta = 8$ হলে (i) নং কনিকের প্রকৃতি নির্ণয় করে এর শীর্ষ বিন্দু এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

ঙ) $\alpha = 9, \beta = -16$ হলে (i) নং কনিকের প্রকৃতি নির্ণয় করে এর কেন্দ্র এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক) $y^2 = 4px - 12$ প্যারাবোলাটি (3, 0) বিন্দুগামী হওয়ায়,

$$\therefore 0 = 4p \times 3 - 12$$

$$\Rightarrow 12p = 12$$

$$\therefore p = 1$$

$$\therefore \text{প্যারাবোলাটির সমীকরণ: } y^2 = 4x - 12$$

$$\Rightarrow y^2 = 4(x - 3)$$

$$\Rightarrow Y^2 = 4.1.X$$

$$\therefore a = 1, X = x - 3 \text{ এবং } Y = y$$

\therefore উপকেন্দ্র নির্ণয়:

$$(X, Y) = (a, 0)$$

$$\Rightarrow (x - 3, y) = (1, 0)$$

$$\therefore (x, y) = (4, 0)$$

\therefore উপকেন্দ্র: (4, 0)

$$\text{অক্ষের সমীকরণ: } Y = 0 \Rightarrow y = 0$$

এবং নিয়ামকের সমীকরণ:

$$X = -a \Rightarrow x - 3 = -1 \therefore x - 2 = 0$$

খ) উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{SP}{PM} = \frac{2}{3}$

$$\text{উপবৃত্তটির সমীকরণ } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ হলে, } ae = 3$$

$$\Rightarrow a \times \frac{2}{3} = 3 \therefore a = \frac{9}{2}$$

\therefore উপবৃত্তটির নিয়ামকের সমীকরণ:

$$x = \pm \frac{a}{e} \Rightarrow x = \pm \frac{\frac{9}{2}}{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{9}{2} \times \frac{3}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{27}{4}$$

$$\Rightarrow 4x = \pm 27 \therefore 4x \pm 27 = 0$$

গ) ধরি, হাইপারবোলাটির সমীকরণ: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

চিত্রে, S' এর স্থানাঙ্ক $(-3, 0)$

\therefore নির্ণয় হাইপারবোলার বৃহৎ অক্ষ:

$$2a = SS' = \sqrt{(3+3)^2 + (0-0)^2} = 6$$

$$\Rightarrow a = 3 \therefore a^2 = 9$$

আবার, উৎকেন্দ্রিকতা e হলে,

$$e = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} \Rightarrow e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow a^2 e^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow 9 \times 64 = 9 + b^2 \quad [\because e = 8]$$

$$\Rightarrow b^2 = 9 \times 64 - 9$$

$$\Rightarrow b^2 = 9 \times 63 \therefore b^2 = 567$$

\therefore নির্ণয় হাইপারবোলার সমীকরণ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{567} = 1$$

ঘ)

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + 72x - 32y - 16 = 0$$

$\alpha = 18$ এবং $\beta = 8$ হলে,

$$18x^2 + 8y^2 + 72x - 32y - 16 = 0$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 4y^2 + 36x - 16y - 8 = 0$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 36x + 4y^2 - 16y = 8$$

$$\Rightarrow 9(x^2 + 4x) + 4(y^2 - 4y) = 8$$

$$\Rightarrow 9(x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2) + 4(y^2 - 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2) = 8 + 52$$

$$\Rightarrow 9(x+2)^2 + 4(y-2)^2 = 60$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)^2}{\frac{60}{9}} + \frac{(y-2)^2}{15} = 1$$

$$\therefore \frac{X^2}{\frac{20}{3}} + \frac{Y^2}{15} = 1, \text{ যাহা একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।}$$

যেখানে, $X = x + 2$ এবং $Y = y - 2$

$$\therefore a^2 = \frac{20}{3} \text{ এবং } b^2 = 15 \text{ (} a < b \text{)}$$

শীর্ষ নির্ণয়:

$$(X, Y) = (0, \pm b)$$

$$\Rightarrow (x+2, y-2) = (0, \pm \sqrt{15})$$

$$\therefore (x, y) = (-2, 2 \pm \sqrt{15})$$

$$\therefore \text{শীর্ষ: } (-2, 2 \pm \sqrt{15})$$

$$\begin{aligned} \text{এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য} &= \frac{2a^2}{b} = \frac{2 \times \frac{20}{3}}{\sqrt{15}} = \frac{40}{3\sqrt{15}} \\ &= \frac{40\sqrt{15}}{45} = \frac{8\sqrt{15}}{9} \text{ একক} \end{aligned}$$

ঙ)

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + 72x - 32y - 16 = 0$$

$\alpha = 9$ এবং $\beta = -16$ হলে,

$$9x^2 - 16y^2 + 72x - 32y - 16 = 0$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 72x - 16y^2 - 32y = 16$$

$$\Rightarrow 9(x^2 + 8x) - 16(y^2 + 2y) = 16$$

$$\Rightarrow 9(x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2) - 16(y^2 + 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2) = 16 + 144 - 16$$

$$\Rightarrow 9(x+4)^2 - 16(y+1)^2 = 144$$

$$\Rightarrow \frac{(x+4)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

$$\therefore \frac{X^2}{4^2} - \frac{Y^2}{3^2} = 1, \text{ যাহা একটি হাইপারবোলার সমীকরণ।}$$

যেখানে, $X = x + 4$ এবং $Y = y + 1$

$$\therefore a = 4 \text{ এবং } b = 3$$

$$\therefore e = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{16 + 9}{16}} = \frac{5}{4}$$

কেন্দ্র নির্ণয়:

$$(X, Y) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow (x+4, y+1) = (0, 0)$$

$$\therefore (x, y) = (-4, -1)$$

$$\therefore \text{কেন্দ্র: } (-4, -1)$$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ: $X = \pm ae$

$$\Rightarrow x+4 = \pm 4 \times \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow x+4 = \pm 5$$

$$\therefore x-1 = 0, x+9 = 0$$